## INSIEMI (REALI)

→ collezione di oggetti finita o infinita

$A=\{\text{ROSSO, VERDE, BLU}\}$ → enumerazione

$B=\{a;\ a\in \text{alfabeto italiano}\}$ → categorica




NON CONTA L'ORDINE

$a,b,c\in B \quad x\notin B$

$\phi$ VUOTO (non contiene nulla)

- INCLUSIONE $C\subseteq D$




→ quantificatori universali $(\forall,\exists)$

$\forall x\in C, x\in D$

$A=\{x: x^2\leq 0\}=\{0\}$ $\forall x\ x\geq 0$ $x\cdot x=0 \iff x=0$ (è risolvibile)

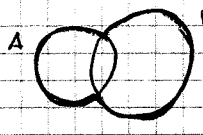
$B=\{x: x^2<0\}=\phi$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

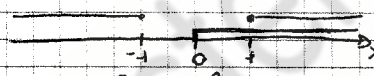
U → UNIONE ∩ → INTERSEZIONE

① $A,B$ $A\cup B \overset{\text{def}}{=} \{x: x\in A \text{ oppure } x\in B\}$ $A=\{\text{ROSSO, VERDE, BLU}\}$ $B=\{\text{ROSSO, GIALLO, NERO}\}$ $A\cup B=\{\text{ROSSO, VERDE, BLU, GIALLO, NERO}\}$




$A=\{x\in\mathbb{R}, x>0\}$ $]0;+\infty[$

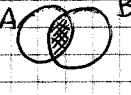
$B=\{x\in\mathbb{R}: x^2\geq 1\}$ $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ $x\in\mathbb{R}$: $\{x\in\mathbb{R} -\infty<x\leq -1\}\cup\{1\leq x<+\infty\}$




$A\cup B=]-\infty;-1]\cup]0;+\infty[=\mathbb{R}\setminus]-1;0]$

COMPLEMENTARE: $C=\{\text{LU, MA, ME, GI, VE, SA, DO}\}$ $D=\{\text{giorni di lezione}\}=C\setminus\{\text{SA, DO}\}$

② $A\cap B=\{x\in A \text{ e } x\in B\}$



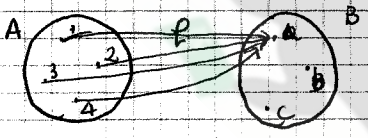

$A\cap B=[-1;+\infty[$

**FUNZIONE**: DOMINIO $A$ $\quad A=\mathbb{R}$ $B=\mathbb{R}$ $f(x)=x^2$

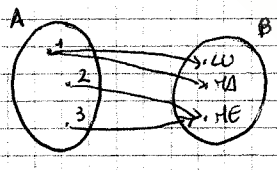
CODOMINIO $B$

"RELAZIONE" $f$

A OGNI ELEMENTO DI A DEVE CORRISPONDERE UN SOLO ELEMENTO DI B $\quad f_1(x)=\sqrt{x}$ (A non è ben definito)




$f(1)=a$
$f(2)=a$
$f(3)=a$
$f(4)=a$

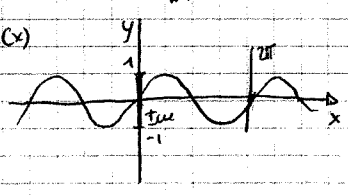



NON È UNA FUNZIONE

IMMAGINE DI $f$ → $\text{Im}(f)\subseteq B$ $\quad \text{Im}(f)=\{b\in B: \exists a\in A: f(a)=b\}$ (esiste almeno uno)

$\exists!$ ESISTE ED È UNICO

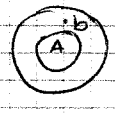
$f(x)=\sin(x)$




$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad \text{Im}(f)=[-1;1]\subsetneq\mathbb{R}$

$A\subsetneq B$ A è un sottoinsieme proprio di B

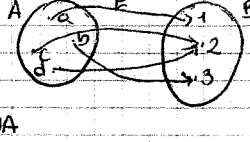
$\exists b\in B: b\notin A$




$A=B$ $\quad A\subseteq B$ e $B\subseteq A$

$\forall x\in A, x\in B; \forall x\in B, x\in A$

**SURGETTIVA** $\text{Im}(f)=B$ $\quad \forall b\in B: \exists a\in A: f(a)=b$




$f(a)=1$ $f(b)=3$
$f(c)=f(d)=2$

① $A\in\mathbb{R}$ $B=\mathbb{R}$ $f(x)=x^2$ È SURGETTIVA? NO

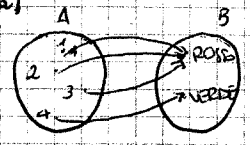
② $A=\mathbb{R}$ $B=\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R}: x\geq 0\}$ $f(x)=x^2$ È SURGETTIVA

Dimostrare che la funzione dell'esempio 2 è SURGETTIVA $\forall y \geq 0 \ \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \ f(x) = x^2$
$y \geq 0 \quad x^2 \geq 0 \ \forall x$ ok $\to f$ È SURGETTIVA

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ NON SURGETTIVA $\exists b \in B : \forall a \in A \ f(a) \neq b$ (per negare una proposizione $\forall \in \exists$ si inverte tutto)

**$f: A \to B$ INIETTIVA** $\forall a_1, a_2 \in A \ a_1 \neq a_2 : f(a_1) \neq f(a_2)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ NON È INIETTIVA: $f(1) = f(-1)$




$f(1) = f(2) = f(3) = \text{ROSSO}$
$f(4) = \text{VERDE}$
NON È INIETTIVA!
È SURGETTIVA

$\exists a_1, a_2 \in A \ a_1 \neq a_2 : f(a_1) = f(a_2)$

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ È INIETTIVA $x_1 < x_2 \quad f(x_1) \neq f(x_2)$
$\Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \quad x_1^2 - x_2^2 < 0 \quad (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0$ ok
($x_1 - x_2 < 0$, $x_1 + x_2 > 0$)

$f: A \to B$ INIETTIVA, $f$ INIETTIVA ma non surgettiva, $f$ SURGETTIVA ma non iniettiva

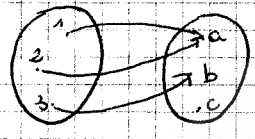
**$f: A \to B$ BIGETTIVA** $f$ è sia iniettiva che surgettiva
ONE-TO-ONE




$f(1) = a$
$f(2) = b$
$f(3) = c$
↑ INSIEMI EQUIPOTENTI (hanno lo stesso numero di elementi)
$\#\{\text{elementi}\} = 3$

$f^{-1}$ **FUNZIONE INVERSA** $f^{-1}(a) = 1 \quad f^{-1}(b) = 2 \quad f^{-1}(c) = 3$
$f^{-1}: B \to A$

$f^{-1}(f(a)) = a \ \forall a \in A$
$f(f^{-1}(b)) = b \ \forall b \in B$




$g(1) = g(2) = a$
$g(3) = b$
NON È SURGETTIVA NÈ INIETTIVA $\Rightarrow$ NON POSSO TROVARE LA FUNZIONE INVERSA

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6 \dots\}$

$f(x) = x^3$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ INIETTIVA? SURGETTIVA? BIGETTIVA? INVERSA? $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 : f(x_1) \neq f(x_2)$ INIETTIVA $\Rightarrow$ BIGETTIVA
$x \in \mathbb{R} \ f(x) \leq (-x)^3 = -x^3 \quad 0 \leq x < y \ x^3 < y^3$ $\forall b \in B \ \exists a \in A : f(a) = b$ SURGETTIVA
$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ $\Leftrightarrow x^3 - y^3 < 0 \ (x-y)(x^2 + xy + y^2) < 0$ ok $\to$ È INIETTIVA $\Rightarrow f$ è **CRESCENTE IN SENSO STRETTO** $(x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$ ⊛

$f(x) = x^2$ $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $g^{-1}(y) = \sqrt{y}$ le due funzioni sono una l'inversa dell'altra $g(f(x)) = \sqrt{x^2} \quad x = \sqrt{x^2} = |x|$
$g(x) = \sqrt{x}$ $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $g^{-1}(y) = y^2$ SONO INVERSE $g(f(x)) = x$ $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$ **FUNZIONE DEFINITA A TRATTI** ④
$\sqrt{} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

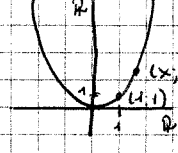
**PRODOTTO CARTESIANO** $A, B$ insiemi $A \times B = \{(a,b) : a \in A \ b \in B\}$ → insieme di tutte le coppie dove il primo elemento sta nel primo insieme e il secondo nel secondo

$A \times B \times C = \{(a,b,c) \dots\}$
$A \times A = A^2$

$A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{\cdot, \star\}$ $A \times B = \{(1,\cdot), (2,\cdot), (3,\cdot), (1,\star), (2,\star), (3,\star)\}$

**GRAFICO** $G_f = \{(a,b) \in A \times B : b = f(a)\}$
Insieme delle coppie appartenenti ad $A \times B$ tali che il secondo elemento è l'immagine del primo

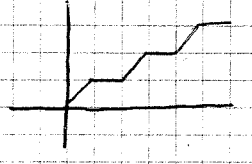
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$




$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$
Tutto il piano
se $x = 1$, solo $(1;1) \in G_f \quad (1,3) \notin G_f$

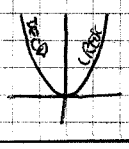
**FUNZIONI DISPARI** $f(x) = -f(x) \ \forall x \in D$ il grafico è simmetrico rispetto all'origine

⊛ $f(x) = 1/x$ È MONOTONA DECRESCENTE IN SENSO STRETTO $\to x < y \to f(x) > f(y) \ \forall x \in D$



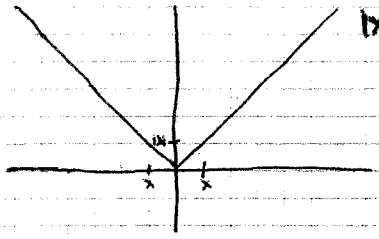
$x < y \to f(x) \leq f(y)$ FUNZIONE CRESCENTE (NON IN SENSO STRETTO)
$x < y \to f(x) \geq f(y)$ FUNZIONE DECRESCENTE (NON IN SENSO STRETTO)

$f(x) = x^2$




⊛

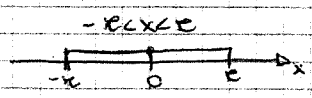
④ $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $f(x)=x^2$ g: $f^{-1}$ (Solo una è l'inversa dell'altra solo se si restringe il dominio).



$|x|$ **FUNZIONE PARI** $f(-x)=f(x)$ il grafico è simmetrico rispetto all'asse y

$|x| \geq 0$ $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$ $-|x| \leq x \leq |x|$

$|x|<\varepsilon$ $x=0$ ϕ
$\varepsilon \leq 0$ ϕ
$\varepsilon > 0$ $x<\varepsilon$ se $x \geq 0$
$-x<\varepsilon$ se $x<0$
$x>-\varepsilon$




- se $x \geq 0$ $|x|=x$ $-x \leq x \leq x$ ok
- se $x<0$ $|x|=-x$ $x \in x \leq -x$ ok

④

**DISEGUAGLIANZA TRIANGOLARE** $|x+y| \leq |x|+|y|$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$

$-|x| \leq x \leq |x|$ $\forall x$ $-|y| \leq y \leq |y|$ $\forall y$ $-|x|-|y| \leq x+y \leq |x|+|y|$ $\underbrace{-(|x|+|y|)}_{-\varepsilon} \leq x+y \leq \underbrace{|x|+|y|}_{\varepsilon} \Rightarrow |x+y|<\varepsilon$
$|x|, |y| \geq 0$ $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$ $|x+y| \leq |x|+|y|$ ②

**VALORI ASSOLUTI** $|-x|=|x|$ $|xy|=|x||y|$

**INSIEMI NUMERICI** $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5\ldots\}$ $\cup\{0\}$ NUMERI NATURALI $u+w=w+u$ $\forall u,w \in \mathbb{N}$
$u+0=0+u=u$ $\forall u \in \mathbb{N}$

① OPERAZIONE BINARIA (funzione che da una coppia di numeri da un numero naturale)
$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$\mathbb{P}=\{2,4,6,8\ldots\}=\{u=2w, w \in \mathbb{N}\}$
$\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(u)=2u$ $f(1)=2$ $f(2)=4$ $f(3)=6$ $f(4)=8$ $Im(f)=\mathbb{P}$
$f: \mathbb{N} \to \mathbb{P}$
$g: \mathbb{P} \to \mathbb{N}$ $g(u)=u/2$

$f(g(u))=2(u/2)=u$ $\forall u \in \mathbb{P}$ f e g sono l'una l'inversa
$g(f(u))=2u/2=u$ $\forall u \in \mathbb{N}$ dell'altra

⇓

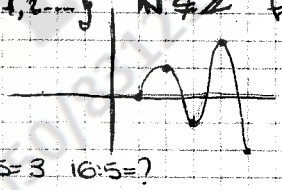
biiezione tra $\mathbb{P}$ e $\mathbb{N}$ → si può fare solo perché $\mathbb{N}$ e $\mathbb{P}$ sono insiemi infiniti

$A \subseteq B$ $\#A \leq \#B$ A,B sono insiemi finiti $A \subsetneq B$ $\#A<\#B$
A,B sono insiemi infiniti si può avere anche lo stesso numero di elementi

A è finito $\exists N \in \mathbb{N}$ $f: A \to \{1,2\ldots,N-1,N\}$ BIGETTIVA

⊗ OPERAZIONE BINARIA $\cdot: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $u \cdot w = w \cdot u$ $\forall u,w \in \mathbb{N}$ $u \cdot 1 = 1 \cdot u = u$ $\forall u \in \mathbb{N}$
ASSOCIATIVA DISTRIBUTIVA
$(u \cdot w) \cdot k = u \cdot (w \cdot k)$ $u(w+k)=uw+uk$

⊖ $u-w$ $w>u$ $\mathbb{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2\ldots\}$ NUMERI INTERI $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$



$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ biiettiva
$1 \leftrightarrow 0$ $f(u)=$
$2 \leftrightarrow 1$ $f^{-1}(u)=$
$3 \leftrightarrow -1$ $f(u)=\begin{cases} u/2 & \text{se } u \text{ pari} \\ -\left(\frac{u-1}{2}\right) & \text{se } u \text{ dispari} \end{cases}$
$4 \leftrightarrow 2$
$5 \leftrightarrow -2$ $u>0$ $u=u/2$ $u=2u$
$f^{-1}(u)=\begin{cases} 2u \text{ se } u \geq 0 & f^{-1}(f(u))=u \\ 1-2u \text{ se } u \leq 0 & f(f^{-1}(u))=u \end{cases}$

SCOMPOSIZIONI IN FATTORI PRIMI $15:5=3$ $16:5=?$

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{u}{w}, u \in \mathbb{Z}, w \in \mathbb{N}\right\}/\sim$ $\frac{u}{w}=\frac{u_1}{w_1}$ $uw_1=u_1w$

$\frac{u}{w}+\frac{u_1}{w_1}=\frac{u_2}{w_2}$ $\frac{u}{1}+\frac{u_1}{1}=u+u_1$

$\frac{1}{4}=0,25$ $\frac{1}{5}|28$ $a:b$ $a=bq+r$ $0 \leq r<b$ $a-b$
$a-b-b$
se $a-qb=0$ $a-qb \geq 0$
a è divisibile per b $a-(q+1)b<0$
↑ DIVISIONE EUCLIDEA

$\frac{3}{15}+\frac{1}{20}$

$15=3 \cdot 5$ $20=2^2 \cdot 5$ $(a,b)=MCD\{a,b\}$ $(a,b)=(b,r)$

MASTER COPY

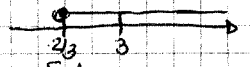
Tel. 388/9837745

② $||x|-|y|| \le |x+y|$ $\forall x,y$ $\quad x = x+y-y \quad |x| = |x+y-y| \overset{\text{dis. }\Delta}{\le} |x+y|+|-y| \quad |x|-|y| \le |x+y|$
$\le |x+y|+|y|$

$y = y+x-x \quad |y| = |y+x-x| \le |x+y|+|-x| \quad |y|-|x| \le |x+y| \quad |x|-|y| \ge -|x+y|$
$\le |x+y|+|x|$

$-|x+y| \le |x|-|y| \le |x+y| \quad (|x| < r \Rightarrow -r < x < r) \Rightarrow ||x|-|y|| \le |x+y|$

$|x-3| < 2x+1 \quad |x-3| = \begin{cases} x-3 \text{ se } x \ge 3 \\ -x+3 \text{ se } x < 3 \end{cases} \quad x-3 < 2x+1 \quad x \ge 3 \quad x > -4$
$-x+3 < 2x+1 \quad x < 3 \quad 3x > 2 \quad x > 2/3$

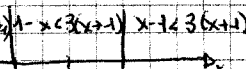



$S = \{x : x > 2/3\} = ]2/3, +\infty[$

$|x-1| \le 3|x+1|$ (1° membro, 2° membro)

$1-x < -3(x+1)$ se $x < -1$
$1-x \le 3(x+1)$ se $-1 \le x \le 1$
$x-1 \le 3(x+1)$ se $x > 1$

$1-x < -3x-3 \quad 2x < -4 \quad x < -2$
$1-x \le 3x+3 \quad 4x \ge -2 \quad x \ge -1/2$
$x-1 \le 3x+3 \quad -2x \le 4 \quad x \ge -2$



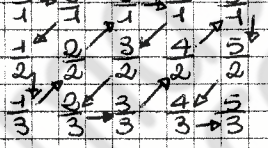

OPPURE $(|x+1|)^2 \le (3|x+1|)^2 \quad (x-1)^2 \le 9(x+1)^2 \quad (x \le -2 \cup x \ge -1/2)$
$x^2+1-2x \le 9x^2+9+18x \quad 8x^2+20x+8 \ge 0 \quad x = \frac{-5 \pm 3}{4} \quad x_1 = -2 \quad x_2 = -1/2$ VE

$|x|^2 = \begin{cases} x^2 \text{ se } x \ge 0 \\ (-x)^2 \text{ se } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 \text{ se } x \ge 0 \\ x^2 \text{ se } x < 0 \end{cases}$ ②

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$




**DIVISIONE** $MCD\{a,b\} = (a,b)$ **MASSIMO**

$M$ è il MASSIMO di $A$ se ① $M \ge a \ \forall a \in A$
② $M \in A$

① $M = \max A$ potrebbe non esistere $A = ]0,1[ = \{x : 0 < x < 1\}$
② Il massimo è unico e unico lo è, se esiste
$M_1, M_2 \quad M_1 \ne M_2 \quad M_1 = \max A \quad M_1 \ge a \ \forall a \in A \quad M_1 \in A \Rightarrow M_1 \ge M_2 \quad M_1 = M_2$ ASSURDO!
$M_2 = \max A \quad M_2 \ge a \ \forall a \in A \quad M_2 \in A \qquad M_2 \ge M_1$

$\mathbb{N} \to a = p_1 p_2 \dots p_k$ INSIEME FINITO $\quad \#A = n \ \exists n \in \mathbb{N}$
insieme finito $\to$ ammette massimo

$MCD\{a,b\} \cdot mcm\{a,b\} = ab$

$\frac{m}{n} + \frac{m_1}{n_1} = \frac{mn_1 + nm_1}{nn_1}$ si fa quest'operazione e poi si semplifica (si divide per il MCD)

$a,b \in \mathbb{N} \quad a > b \quad a = bq + r \quad \exists q, r \in \mathbb{N} \quad 0 \le r < b \quad (a;b) = (b;r)$
d divide a, d divide b $\Leftrightarrow$ d divide b, d divide r

d|a e d|b $\Leftrightarrow$ d|b e d|r

$a = bq + r$
$\exists a' \in \mathbb{N} \ a = da'$
$\exists b' \in \mathbb{N} \ b = db'$ $\quad da' = db'q + r \quad r = da' - db'q = d(a - b'q) \Rightarrow d$ è divisore anche di r

$A = \{$divisori comuni di a e b$\} \ne \emptyset \quad A = B$
$B = \{$divisori comuni di b e r$\} \ne \emptyset$
ce n'è almeno uno (1)

$\frac{2}{7} + \frac{5}{21} = \frac{2 \cdot 21 + 5 \cdot 7}{21 \cdot 7} = \frac{42+35}{147} = \frac{77}{147}$

DIVISIONE EUCLIDEA

$(147, 77) \quad 147 = 77 \cdot q + r \quad 147 = 77 \cdot 1 + 70$
$a = b \cdot q + r$
$(77, 70) \quad 77 = 70 \, q + r \quad 77 = 70 \cdot 1 + 7$ ① MCD (ultimo resto non nullo che ci rimane)
$(70, 7) \quad 70 = 7 \cdot q + r \quad 70 = 7 \cdot 10 + 0$

$a, b \quad a > b \quad a = bq + r \quad b = rq_1 + r_1 \quad r = r_1 q_2 + r_2$

$\frac{6}{5}$ $6:5=1,2$ $\frac{5}{10}$ $\frac{10}{0}$ $\frac{4}{33}$ $4$ $40$ $70$ $40$ $70$ $33$ $0,1212\ldots$ $0,\overline{12}$

$\frac{u}{u} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_4}{10^4}$

$q\,q_0\,a_1\,a_2\ldots a_k\,\overline{b_1 b_2 \ldots b_m} = \frac{a_0\,a_1 a_2 \ldots a_k\,b_1 b_2 \ldots b_m - q_0 q_1 \ldots q_k}{\underbrace{9\ldots9}_{m}\underbrace{0\ldots0}_{k}}$

**(1)** $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

PER ASSURDO $u, u \in \mathbb{N}$ ridotti ai minimi termini ($u$ e $u$ privi di divisori comuni) $\frac{u}{u} = \sqrt{2}$ $\left(\frac{u}{u}\right)^2 = \frac{u^2}{u^2} = 2$ $u^2 = 2u^2$

$\Rightarrow u^2$ è pari $\Rightarrow u$ è pari

(se $u$ fosse dispari $u^2 = (2q-1)^2 = 4q^2 - 4q + 1 = 2(2q^2 - 2q) + 1$ DISPARI)

$\Rightarrow u = 2q$ $(2q)^2 = 2u^2 = 4q^2$ $2q^2 = u^2$ $u^2$ è pari $\Rightarrow u$ è pari

$\Rightarrow u$ PARI, $u$ PARI $\Rightarrow$ hanno un fattore comune $\Rightarrow$ ASSURDO!

$0 \le x < y \Rightarrow x^2 < y^2$ $1^2 < 2$ $2^2 = 4 > 2$ $1 < \sqrt{2} < 2$

$(1,1)^2 = 1,21 < 2$ $(1,2)^2 = 1,44 < 2$ $(1,3)^2 = 1,69 < 2$ $(1,4)^2 = 1,96 < 2$ $(1,5)^2 = 2,25 > 2$

$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

$(1,41)^2 = 1,9881 < 2$ $(1,42)^2 = 2,0164 > 2$

$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$

$(1,414)^2 = \ldots$

$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ = l'unione dei numeri decimali periodici e non periodici

**ALGORITMO DI ERONE**

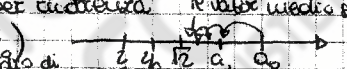
- $a_0 \in \mathbb{Q}$ $a_0 > \sqrt{2}$ $a_0 = 2$ $\frac{2}{a_0} < \sqrt{2}$ $\frac{2}{\sqrt{2}} < a_0$

$a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{2}{a_0}\right)$ si calcola per ricorrenza; il valore medio $a_1$ avvicina a $\sqrt{2}$

$a_1$ è il punto medio di $a_0$ e $\frac{2}{a_0}$

$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{2}{a_1}\right)$

$a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{2}{a_2}\right)$




$a_0 = 2$
$a_1 = 1,\overline{5}$
$a_2 = 1,41\overline{6}$
$a_3 = 1,41421568$

**SUCCESSIONE DEFINITA PER RICORRENZA** $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$ SUCCESSIONE $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $f(n) = f_n$

↳ bisogna essere sicuri che l'algoritmo funzioni: $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$ $a_0 = 2$ $a_1 = \sqrt{1-2}$ NO

Supponiamo che $a_0, a_1, \ldots a_n$ siano tutti $> \sqrt{2}$ $a_{n+1} > \sqrt{2}$? $a_{n+1} - \sqrt{2} > 0$

$\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) - \sqrt{2} > 0$ $\frac{a_n^2 + 2}{2a_n} - \sqrt{2} > 0$ $\frac{a_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}a_n}{2a_n} > 0$ $\frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n} > 0$ ($>0$) ok!

$(a_{n+1} - \sqrt{2}) = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n} \le \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2(a_n - \sqrt{2})} \Rightarrow (a_{n+1} - \sqrt{2}) \le \frac{a_n - \sqrt{2}}{2}$ ($\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n}{2}$)

(a ogni passo l'errore si dimezza $\Rightarrow$ è algoritmo funziona)

- Trovare algoritmo per $\sqrt{3}$ $a_n \in \mathbb{Q}$ $a_0 > \sqrt{3}$ $3 < a_0 < \sqrt{3}$ $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 3a_n)$ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ [$a_0 = 3$ $a_1 = 2$ $a_2 = 1,75$ $a_3 = 1,7321$]

$a_{n+1} > \sqrt{3}$? $a_{n+1} - \sqrt{3} > 0$ $\frac{1}{2}(a_n + 3a_n) - \sqrt{3} > 0$ $\frac{a_n^2 + 3 - 2\sqrt{3}a_n}{2a_n} > 0$ $\frac{(a_n - \sqrt{3})^2}{2a_n} > 0$ ok $a_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{(a_n - \sqrt{3})^2}{2a_n} \le \frac{(a_n - \sqrt{3})^2}{2(a_n - \sqrt{3})}$

$N, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \ldots \to$ NUMERO REALE

$x = y$ $|[x]_n - [y]_n| \le \frac{1}{10^n}$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = y$ ($0,\overline{9} = 1$) $|[0,1]_0 - [0,2]_0| = 0 - 0$ $n = 0$

$|[0,1]_1 - [0,2]_1| = 1/10$ $n = 1$

$|[0,1]_2 - [0,2]_2| = 1/100 \not< 1/10^2$

$x \neq y$ $\exists n_0 : |[x]_{n_0} - [y]_{n_0}| > \frac{1}{10^{n_0}}$

$\Downarrow$

$x = x$ $x = y \Rightarrow y = x$ $x = y,\ y = z \Rightarrow x = z$

$x = 0, x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots$ $[x]_n \le x \le [x]_n + \frac{1}{10^n}$ $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{Q}$ $\alpha_n < x < \beta_n$ con $x$ approssimazioni da sotto e da sopra che a ogni passo vanno a coincidere

$y = 0, y_1 y_2 y_3 y_4 \ldots$

$[x]_n + [y]_n \le x + y \le [x]_n + [y]_n + \frac{2}{10^n}$ ($\varepsilon$) maggiore e $n$, maggiore è la precisione